

קורס קדם במתמטיקה

פרק 11 - זיהוי משולשים על פי קשר בין זוויות וצלעות

תוכן העניינים

1. זיהוי על פי זוויות בלבד.....1
2. זיהוי על פי זוויות וצלעות יחדיו.....4

זיהוי על פי זוויות בלבד:

סיכום כללי:

סגנון השאלות:

- הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש ישר זווית.
- הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש שווה שוקיים.
- הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש ישר זווית או שווה שוקיים.

זוויות חשובות שחוזרות על עצמן:

במשולש מתקיים תמיד: $\alpha + \beta + \gamma = 180$.

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma, \sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha, \sin(\alpha + \gamma) = \sin \beta} \quad -$$

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma, \cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha, \cos(\alpha + \gamma) = -\cos \beta} \quad -$$

מחצית מהזוויות תמיד מקיימות: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90$.

$$\boxed{\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\gamma}{2}, \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}, \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \cos \frac{\beta}{2}} \quad -$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \sin \frac{\gamma}{2}, \cos\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \sin \frac{\alpha}{2}, \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \sin \frac{\beta}{2}} \quad -$$

- חשוב לזכור את הזהויות של זווית כפולה ושל סכום והפרש זוויות ופונקציות לפתיחת הביטויים המתקבלים.



אסטרטגית פתרון:

- מביאים את המשוואה לאחת מהתבניות הבאות:

$$\sin \alpha = \sin \Delta \Rightarrow \alpha = \Delta, \alpha = 180 - \Delta$$

$$\cos \alpha = \cos \Delta \Rightarrow \alpha = \Delta, \alpha = -\Delta$$

$$\tan \alpha = \tan \Delta \Rightarrow \alpha = \Delta$$

- מביאים את המשוואה לתבנית $A \cdot B = 0$ ואז או $A = 0$ או $B = 0$.

כעת, לפי הדרישה בתרגיל יש לוודא שכל אחד מהמסלולים ($B = 0$ או $A = 0$) מוביל למה שצריך להוכיח או לסתירה.

- בתרגילים מורכבים יותר מביאים לתבנית $A \cdot B \cdot C = 0$

ואז: או $A = 0$ או $B = 0$ או $C = 0$.

שוב, לפי הדרישה בתרגיל יש לוודא שכל אחד מהמסלולים מוביל למה שצריך להוכיח או לסתירה.

הערה:

יש להימנע מצמצום בתהליך הפתרון.

שאלות:

$$(1) \quad \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \quad \text{הוכח: אם זוויות המשולש } \alpha, \beta \text{ מקיימות את התנאי}$$

הרי המשולש ישר זווית או שווה שוקיים.

$$(2) \quad \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \quad \text{הוכח: אם זוויות המשולש } \alpha, \beta, \gamma \text{ מקיימות את התנאי}$$

הרי המשולש שווה שוקיים.

$$(3) \quad \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \cos^2 \gamma = 0 \quad \text{הוכח: אם זוויות המשולש } \alpha, \beta, \gamma \text{ מקיימות את התנאי}$$

הרי המשולש ישר זווית.

$$(4) \quad \sin \gamma - \sin \beta + \sin(\gamma - \beta) = 0 \quad \text{הוכח: אם זוויות המשולש } \alpha, \beta, \gamma \text{ מקיימות את התנאי}$$

הרי המשולש שווה שוקיים.



(5) הוכח: אם זוויות המשולש α , β , γ מקיימות את התנאי $\cos \alpha + \cos \beta = \sin \gamma$ הרי המשולש ישר זווית.

(6) הוכח: אם זוויות המשולש α , β , γ מקיימות את התנאי $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sin \gamma$ הרי המשולש ישר זווית.

(7) הוכח: אם זוויות המשולש α , β , γ מקיימות את התנאי $\frac{\sin(\alpha + \gamma) \cos \gamma}{\sin(\alpha + \beta) \cos \beta} = \frac{1 - \cos 2\beta}{1 - \cos 2\gamma}$ הרי המשולש ישר זווית או שווה שוקיים.

(8) הוכח: אם זוויות המשולש α , β , γ מקיימות את התנאי $\sin \alpha = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ הרי המשולש שווה שוקיים.

(9) הוכח: אם זוויות המשולש α , β , γ מקיימות את התנאי $\sin \alpha (\cos \gamma - \cos \beta) = \sin \beta - \sin \gamma$ הרי המשולש ישר זווית או שווה שוקיים.

(10) הוכח: אם זוויות המשולש α , β מקיימות $\sin(\alpha - \beta) [\cos(\alpha + \beta) - 1] = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$ הרי המשולש ישר זווית או שווה שוקיים.

(11) הוכח: אם זוויות המשולש α , β , γ מקיימות את התנאי $\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$ הרי המשולש ישר זווית.

(12) הוכח: אם זוויות המשולש α , β מקיימות את התנאי $\sin \alpha - \sin \beta = \cos \alpha + \cos \beta$ הרי המשולש קהה זווית.
הדרכה: זה רק נראה מפחיד - נסו להוכיח כי אחת הזוויות גדולה מ- 90° .

זיהוי על פי זוויות וצלעות יחדיו:

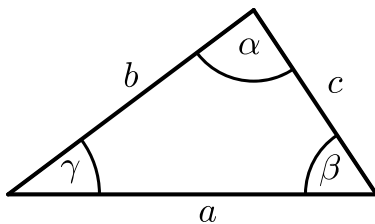
סיכום כללי:

סגנון השאלות:

הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ והצלעות מולן a, b, c בהתאמה מקיימות את התנאי XXX הרי המשולש YYY.

משפטים חשובים:

נתון משולש עם צלעות a, b, c וזוויות α, β, γ ממולן בהתאמה כמתואר באיור. (R הוא רדיוס המעגל החוסם של המשולש).



- משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

- משפט הקוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \sin \gamma$

שאלות:

(1) הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ והצלעות מולן a, b, c בהתאמה מקיימות את התנאי $a \cos \alpha = b \cos \beta$ אז המשולש הוא ישר זווית או שווה שוקיים.

(2) הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ והצלעות מולן a, b, c בהתאמה מקיימות את התנאי $\frac{a}{\cos \alpha} \cdot \frac{b}{\cos \beta} = 4R^2$ אז המשולש הוא ישר זווית

(R רדיוס המעגל החוסם את המשולש).

(3) הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ והצלעות מולן a, b, c בהתאמה מקיימות את התנאי $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{b}{a+c}$ אז המשולש הוא ישר זווית.

(4) הוכח: אם זוויות המשולש α, β, γ והצלעות מולן a, b, c בהתאמה מקיימות את התנאי $\frac{a-b}{a} = 1 - 2 \cos \gamma$ אז המשולש הוא שווה שוקיים.